

3. cvičení - výsledky

Příklad 1.

(a) $D_f = \mathbb{R}^2$ a funkce je na něm spojitá. Pro $x, y \neq 0$ dostaneme

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y \cdot \text{sign}(xy)}{2\sqrt{|xy|}} \quad \text{a} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x \cdot \text{sign}(xy)}{2\sqrt{|xy|}}.$$

Dále $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$. Potom $\frac{\partial f}{\partial x}(x, 0) = 0$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0)$ neexistuje pro $x \neq 0$. Analogicky $\frac{\partial f}{\partial y}(0, y) = 0$ a $\frac{\partial f}{\partial x}(0, y)$ neexistuje pro $y \neq 0$. Parciální derivace jsou spojitě na nějakém okolí bodu $[1, -2]$, tečná rovina má tedy smysl a má rovnici $T(x, y) = \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}(x - 1) - \frac{1}{2\sqrt{2}}(y + 2)$.

(b) $D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x \in [-1, 0] \vee (x \in (0, 1] \wedge y \in (-\infty, -\sqrt{\arcsin x}) \cup (\sqrt{\arcsin x}, +\infty))\}$, funkce je na něm spojitá. Dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{-1}{2\sqrt{y^2 - \arcsin x}\sqrt{1 - x^2}}, \quad x \in (-1, 1), y^2 > \arcsin x, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{y}{\sqrt{y^2 - \arcsin x}}, \quad x \in [-1, 1], y^2 > \arcsin x. \end{aligned}$$

Parciální derivaci podle x nemá smysl počítat ve vynechaných bodech (definiční obor neobsahuje vodorovnou úsečku kolem nich), podobně parciální derivaci podle y nemá smysl počítat ve vynechaných bodech až na počátek. Zde dostaneme, že $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ neexistuje. Obě derivace jsou spojitě alespoň na nějakém okolí bodu $[0, 1]$. Pro tečnou rovinu dostaneme $T(x, y) = y - \frac{x}{2}$.

(c) $D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; |x| + 2|y| < 3\}$ a funkce je zde spojitá. Dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{-e^{|x|+2|y|} \cdot \text{sign } x}{e^3 - e^{|x|+2|y|}}, \quad [x, y] \in D_f, x \neq 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{-e^{|x|+2|y|} \cdot 2 \text{sign } y}{e^3 - e^{|x|+2|y|}}, \quad [x, y] \in D_f, y \neq 0. \end{aligned}$$

Dále derivace $\frac{\partial f}{\partial x}(0, y)$ pro $y \in (-\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0)$ pro $x \in (-3, 3)$ neexistují. Alespoň na nějakém okolí bodu $[1, \frac{1}{2}]$ jsou parciální derivace spojitě. Pro tečnou rovinu dostaneme $T(x, y) = \log(e^3 - e^2) - \frac{1}{e-1}(x - 1) - \frac{2}{e-1}(y - \frac{1}{2})$.

(d) $D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; -1 + \cos y \leq x \leq 1 + \cos y\}$ a f je zde spojitá. Dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{-1}{\sqrt{1 - (x - \cos y)^2}}, \quad -1 + \cos y < x < 1 + \cos y, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{-\sin y}{\sqrt{1 - (x - \cos y)^2}}, \quad -1 + \cos y < x < 1 + \cos y. \end{aligned}$$

Parciální derivaci dle x nemá ve vynechaných bodech smysl počítat, neboť definiční obor neobsahuje vodorovnou úsečku kolem těchto bodů. Podobně nemá smysl počítat derivaci dle y (svislé úsečky) s výjimkou bodů $[0, k\pi], k \in \mathbb{Z}$. Zjistíme, že $\frac{\partial f}{\partial y}(0, k\pi)$ neexistuje. Alespoň na nějakém okolí bodu $[1, 0]$ jsou parciální derivace spojité, pro tečnou rovinu dostaneme $T(x, y) = \frac{\pi}{2} - (x - 1)$.

- (e) $D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x \leq y^2\}$ a f je zde spojitá. Dostaneme

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{3x^2}{2\sqrt{y^6 - x^3}}, x < y^2,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{3y^5}{\sqrt{y^6 - x^3}}, x < y^2.$$

Z vynechaných bodů má smysl zkoumat pouze derivaci podle proměnné y v počátku, zbylé parciální derivace nemá smysl počítat, neboť funkce není definována na žádné úsečce příslušného směru. Vyjde $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$. Díky spojitosti parciálních derivací na okolí bodu $[0, 2]$ má smysl zkoumat tečnou rovinu, vyjde $T(x, y) = 8 + 12(y - 2)$.

- (f) Definičním oborem je celá rovina a funkce je zde spojitá. Dostaneme $f'_x = \sin x, y > \cos x$ a 0 pro $y < \cos x$; $f'_y = 1, y > \cos x$ a 0 pro $y < \cos x$. V bodech $[k\pi, \cos k\pi], k \in \mathbb{Z}$ je $f'_x = 0$. V ostatních bodech parciální derivace neexistují. Díky spojitosti parciálních derivací na okolí bodu $[0, \pi]$ má smysl zkoumat tečnou rovinu, vyjde $T(x, y) = y - 1$.
- (g) Definičním oborem je celá rovina a funkce je zde spojitá. Dostaneme $f'_x = 1, y > x^3 - x$ a $3x^2$ pro $y < x^3 - x$; $f'_y = 1, y > x^3 - x$ a 0 pro $y < x^3 - x$. Pro $x = \pm\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$ existuje f'_x v bodě $[x, x^3 - x]$ a rovná se 1. Parciální derivace ve zbylých bodech neexistují.

Příklad 2.

- (a) $D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x \in (0, 1) \vee (0 \geq x \wedge y \in (-\infty, \sqrt[3]{x}) \cup (-\sqrt[3]{x}, +\infty))\}$ a f je zde spojitá. Dostaneme

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{-|y| - 1}{3\sqrt[3]{x^2}(1 - \sqrt[3]{x})(|y| + \sqrt[3]{x})}, [x, y] \in D_f, x \neq 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{-\text{sign } y}{|y| + \sqrt[3]{y}}, [x, y] \in D_f, y \neq 0.$$

Derivace $\frac{\partial f}{\partial x}(0, y)$ pro $y \neq 0$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0)$ pro $x \in (0, 1)$ neexistují. Alespoň na nějakém okolí bodu $[-1, 3]$ jsou parciální derivace spojité, pro tečnou rovinu dostaneme $T(x, y) = -\frac{1}{3}(x + 1) - \frac{1}{2}(y - 3)$.

- (b) $D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; -(x + 1)^2 \leq y \leq x^2 + 1\}$ a f je zde spojitá. Pro body $[x, y]$ splňující $-(x + 1)^2 < y < x^2 + 1$ dostaneme

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x+y}{x^2+x+1}\right)^2}} \cdot \frac{-x^2 + 1 - 2xy - y}{(x^2 + x + 1)^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x+y}{x^2+x+1}\right)^2}} \cdot \frac{1}{x^2 + x + 1}.$$

Derivaci podle y nemá ve vynechaných bodech smysl počítat, neboť definiční obor neobsahuje svislou úsečku kolem těchto bodů. Derivaci podle x má smysl počítat pouze v bodech $[0, 1], [-1, 0]$ (v ostatních chybí vodorovná úsečka). Derivace $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 1), \frac{\partial f}{\partial x}(-1, 0)$ neexistují. Díky spojitosti derivací na okolí bodu $[1, -1]$ můžeme najít tečnou rovinu a ta má tvar $T(x, y) = \frac{1}{3}(x + y)$.

- (c) $D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; (y > 0 \wedge y \geq \sin x) \vee (y < 0 \wedge y \leq \sin x)\}$ a funkce je zde spojitá. Pro body $[x, y]$ splňující, že $y > 0$ a $y > \sin x$ či $y < 0$ a $y < \sin x$, dostaneme

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{\cos x}{2y} \sqrt{\frac{y}{y - \sin x}} \quad \text{a} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\sin x}{y^2} \sqrt{\frac{y}{y - \sin x}}.$$

Derivaci podle proměnné x má smysl počítat pouze v bodech $[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, 1]$ a $[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, -1]$ pro $k \in \mathbb{Z}$. V ostatních bodech nemá smysl počítat derivaci ani podle x , ani podle y , protože definiční obor neobsahuje úsečky kolem těchto bodů. Dostaneme, že $\frac{\partial f}{\partial x}(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, 1)$ a $\frac{\partial f}{\partial x}(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, -1)$ neexistují. Díky spojitosti parciálních derivací na okolí bodu $[0, 5]$ má smysl zkoumat tečnou rovinu, její předpis je $T(x, y) = 1 - \frac{1}{10}x$.

- (d) $D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; y > -3x\}$ a funkce je zde spojitá. Pro $y \neq \frac{2}{3}x$ dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= f(x, y) \left(\frac{3|2x - 3y|}{3x + y} + 2 \operatorname{sign}(2x - 3y) \log(3x + y) \right) \quad \text{a} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= f(x, y) \left(\frac{|2x - 3y|}{3x + y} - 3 \operatorname{sign}(2x - 3y) \log(3x + y) \right). \end{aligned}$$

V bodě $[\frac{3}{11}, \frac{2}{11}]$ jsou obě parciální derivace nulové. Ve zbylých bodech parciální derivace neexistují.

- (e) $D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x > 2y\}$ a funkce je zde spojitá. Pro $y \neq 2x$ dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= f(x, y) \left(\frac{|2x - y|}{x - 2y} + 2 \operatorname{sign}(2x - y) \log(x - 2y) \right) \quad \text{a} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= f(x, y) \left(-\frac{2|2x - y|}{x - 2y} - \operatorname{sign}(2x - y) \log(x - 2y) \right). \end{aligned}$$

V bodě $[-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}]$ jsou obě parciální derivace nulové. Ve zbylých bodech parciální derivace neexistují.

- (f) Definičním oborem je celá rovina a funkce je zde spojitá. Standardně obdržíme

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 2x \cdot \operatorname{sign}(x^2 + y^2 - 1) \cos |x^2 + y^2 - 1|, \quad x^2 + y^2 \neq 1, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= 2y \cdot \operatorname{sign}(x^2 + y^2 - 1) \cos |x^2 + y^2 - 1|, \quad x^2 + y^2 \neq 1. \end{aligned}$$

Lze spočítat, že $f'_x(0, \pm 1) = f'_y(\pm 1, 0) = 0$. Derivace ve zbylých bodech neexistují.

(g) Definičním oborem je celá rovina a funkce je zde spojitá. Standardně obdržíme

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2x \cdot \cos \sqrt[3]{x^2 + y^2 - 1}}{3 \sqrt[3]{(x^2 + y^2 - 1)^2}}, x^2 + y^2 \neq 1,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{2y \cdot \cos \sqrt[3]{x^2 + y^2 - 1}}{3 \sqrt[3]{(x^2 + y^2 - 1)^2}}, x^2 + y^2 \neq 1.$$

Parciální derivace v bodech splňujících $x^2 + y^2 = 1$ neexistují.

(h) $D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; |x| + |y| \geq 1\}$ a funkce je zde spojitá. Standardně obdržíme

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\text{sign } x}{2\sqrt{|x| + |y| - 1}}, |x| + |y| > 1 \wedge x \neq 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\text{sign } y}{2\sqrt{|x| + |y| - 1}}, |x| + |y| > 1 \wedge y \neq 0.$$

Funkce $f'_x(0, y)$, $f'_y(x, 0)$ neexistují pro $|y| \geq 1$, $|x| \geq 1$. Derivace ve zbylých bodech nemá smysl zkoumat.

(i) $D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; (y \geq 0 \wedge |x| > |y|) \vee (y \leq 0 \wedge |x| < |y|)\}$ a funkce je zde spojitá. Pro body $[x, y] \in D_f$ dostaneme, že

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{1}{2} \text{sign}(x) \sqrt{\frac{y}{(|x| - |y|)^3}}, x \neq 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{|x|}{2\sqrt{y(|x| - |y|)^3}}, y \neq 0.$$

V bodě $[0, y]$, pro $y < 0$, f'_x neexistuje. Ve zbylých bodech nemá smysl parciální derivace zkoumat.

(j) $D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x \geq \max\{-1, -y^2\}\}$ a funkce je zde spojitá. Přímochaře získáme

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = e^{\sqrt{x+1}} \left(\frac{1}{2\sqrt{x+y^2}} + \frac{\sqrt{x+y^2}}{2\sqrt{x+1}} \right), x > \max\{-1, -y^2\},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = e^{\sqrt{x+1}} \frac{y}{\sqrt{x+y^2}}, x > \max\{-1, -y^2\} \vee (x = -1 \wedge |y| > 1).$$

Spočteme, že $f'_y(0, 0)$ neexistuje a parciální derivace ve zbylých bodech nemá smysl zkoumat.

Příklad 3.

(a)

$$\begin{aligned}
D_f &= \mathbb{R}^2 \\
D_{f'} &= \mathbb{R} \setminus [x^2 = y^2, x \neq 0 \neq y] \\
f'_x(x, y) &= \begin{cases} \text{sign}(x^2 - y^2)2x, & x^2 \neq y^2 \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \\
f'_y(x, y) &= \begin{cases} \text{sign}(x^2 - y^2)2y, & x^2 \neq y^2 \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \\
T : z - 3 &= -2(x - 1) + 4(y - 2)
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
D_f &= \mathbb{R}^2 \\
D_{f'_x} &= \mathbb{R}^2 \setminus [x = 0, y \neq 0] \\
D_{f'_y} &= \mathbb{R}^2 \setminus [x \neq 0, y = 0] \\
f'_x(x, y) &= \begin{cases} e^{x^2-y}2x + \text{sign}(xy)x, & xy \neq 0 \\ e^{x^2-y}2x, & y = 0 \end{cases} \\
f'_y(x, y) &= \begin{cases} -e^{x^2-y} + 7 + \text{sign}(xy)x, & xy \neq 0 \\ -e^{x^2-y} + 7, & x = 0 \end{cases} \\
T : z - \frac{1}{e} - 16 &= \left(\frac{2}{e} + 2\right)(x - 1) + \left(8 - \frac{1}{e}\right)(y - 2)
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
D_f &= [y + \sin x \geq 0] \\
D_{f'} &= [y > -\sin x] \\
f'_x(x, y) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos x}{\sqrt{y + \sin x}} \\
f'_y(x, y) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{y + \sin x}} \\
T : z - 1 &= \frac{1}{2}(x - 0) + \frac{1}{2}(y - 1)
\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}
D_f &= \mathbb{R}^2 \\
D_{f'_x} &= \mathbb{R}^2 \setminus [x^2 + y^2 = 1, x \neq 0] \\
D_{f'_y} &= \mathbb{R}^2 \setminus [x^2 + y^2 = 1, y \neq 0] \\
f'_x(x, y) &= \begin{cases} 2x, & x^2 + y^2 < 1 \\ -2x, & x^2 + y^2 > 1 \\ 0, & x^2 + y^2 = 1, x = 0 \end{cases} \\
f'_y(x, y) &= \begin{cases} 2y, & x^2 + y^2 < 1 \\ -2y, & x^2 + y^2 > 1 \\ 0, & x^2 + y^2 = 1, y = 0 \end{cases} \\
T : z + 3 &= -2(x - 1) - 4(y - 2)
\end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned}
D_f &= [xy > 0] \\
D_{f'} &= [xy > 0, x \neq y] \\
f'_x(x, y) &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{\log^2 \frac{x}{y}}} \cdot \frac{1}{x} \\
f'_y(x, y) &= -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{\log^2 \frac{x}{y}}} \cdot \frac{1}{y} \\
T : z - \sqrt[3]{\log \frac{1}{2}} &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{\log^2 \frac{1}{2}}}(x - 1) - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{\log^2 \frac{1}{2}}}(y - 2)
\end{aligned}$$

(f)

$$\begin{aligned}
D_f &= [x > 0, y > 0] \\
D_{f'} &= [x > 0, y > 0] \\
f'_x(x, y) &= x^{(y^x)} \left(y^x \log y \log x + y^x \frac{1}{x} \right) \\
f'_y(x, y) &= x^{(y^x)} (xy^{x-1} \log x) \\
T : z - 1 &= 2(x - 1)
\end{aligned}$$

(g)

$$D_f = \mathbb{R}^2$$

$$D_{f'} = \mathbb{R}^2$$

$$f'_x(x, y) = \begin{cases} 4 \left(\arctan \left(\sqrt{x^2 + y^2} \right) \right)^3 \cdot \frac{x}{1+x^2+y^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & x = y = 0 \end{cases}$$

$$f'_y(x, y) = \begin{cases} 4 \left(\arctan \left(\sqrt{x^2 + y^2} \right) \right)^3 \cdot \frac{y}{1+x^2+y^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & x = y = 0 \end{cases}$$

$$T : z - \arctan^4 \sqrt{5} = \frac{2}{3} \arctan^3 \sqrt{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}(x-1) + \frac{4}{3} \arctan^3 \sqrt{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}(y-2)$$

(h)

$$D_f = \mathbb{R}^2$$

$$D_{f'_x} = [x \neq 0]$$

$$D_{f'_y} = \mathbb{R}^2$$

$$f'_x(x, y) = \begin{cases} \cos(x \cos y) \cos y, & x > 0 \\ -\sin(x \sin y) \sin y, & x < 0 \end{cases}$$

$$f'_y(x, y) = \begin{cases} -\cos(x \cos y) x \sin y, & x > 0 \\ -\sin(x \sin y) x \cos y, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$T : z - \sin(\cos 2) = \cos(\cos 2) \cos 2(x-1) - \cos(\cos 2) \sin 2(y-2)$$